Campus Virtuales, 02, III, 2014

Revisión de Operadores de Agregación

Aggregation Operators Review

David Luis La Red Martínez[1], Julio César Acosta[2]

[1] Profesor Titular, Área Computación, Dpto. de Informática. Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

[2] Profesor, Área Computación, Dpto. de Informática. Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

laredmartinez@gigared.com

RESUMEN. Un problema que el ser humano debe afrontar muy habitualmente es el de tener que agregar, fundir o sintetizar información, esto es, combinar entre sí una serie de datos, procedentes de fuentes diversas, para llegar a una cierta conclusión o tomar una determinada decisión, esto supone el uso de uno o varios operadores de agregación capaces de proporcionar una relación de preferencia colectiva. Estos operadores se deben elegir según criterios específicos teniendo en cuenta las propiedades características de cada operador. En este trabajo se presenta una revisión de estos temas.

ABSTRACT. A problem that humans must face very often is that of having to add, melt or synthesize information, i.e. combined a series of data, from various sources, to reach a certain conclusion or make a certain decision, this implies the use of one or more aggregation operators capable of providing a collective preference relation. These operators must be chosen according to specific criteria taking into account the characteristics of each operator. This paper presents a review of these issues.

PALABRAS CLAVE: Agregación, Operadores de agregación, Medidas de comportamiento de los operadores de agregación, t-normas, t-conormas, Operadores de promedio.

KEYWORDS: Aggregation, Aggregation operators, Behavioral measures of aggregation operators, t-norms, t-conorms, Average operators.

La Red Martínez, D. L., y César Acosta, J. (2014). Revisión de Operadores de Agregación. *Campus Virtuales,* Vol. III, Num. 2, pp. 24-44. Consultado el [dd/mm/aaaa] en www.revistacampusvirtuales.es

1. Introducción

En este artículo se hará una breve reseña de los principales operadores de agregación. El artículo ha sido estructurado como sigue: en primer lugar se hará una breve reseña a la agregación de información; en segundo lugar se presentarán las propiedades matemáticas de la agregación; en tercer lugar se presentarán los principales operadores de agregación; se finalizará con las conclusiones acerca de los mismos.

2. Reseña acerca de la agregación de datos

Un problema que el ser humano debe afrontar muy habitualmente es el de tener que agregar, fundir o sintetizar información, esto es, combinar entre sí una serie de datos, procedentes de fuentes diversas, para llegar a una cierta conclusión o tomar una determinada decisión (Pradera Gómez, 1999).

Además, en la actividad cotidiana de las organizaciones (entre ellas las gubernamentales) se deben tomar decisiones de las que depende el éxito de la gestión. Generalmente se utilizan modelos de decisión que incluyen una fase de agregación y otra de explotación. La agregación supone el uso de uno o varios operadores capaces de proporcionar una relación de preferencia colectiva. Así, la agregación de información de manera eficiente y flexible se ha convertido en la principal tarea de los problemas de acceso de información y otros problemas de decisión multicriterio (Canós Darós & Liern Carrión, 2006).

El problema de la agregación surge en prácticamente cualquier disciplina, siendo los campos de la medicina, la economía, la estadística o la teoría de control sólo algunos ejemplos significativos.

La búsqueda, estudio y formalización de métodos y técnicas para la agregación de información constituye por lo tanto un campo de investigación de amplio espectro y de gran actualidad. En particular, la necesidad de disponer de mecanismos rigurosos para este cometido se hace especialmente patente en el ámbito de los Gobiernos o Administraciones, ya que la agregación de información es fundamental en campos tales como la toma de decisiones y la adquisición del conocimiento a partir de grandes volúmenes de datos, entre otros, resultando muy útiles las agregaciones entre el operador mínimo y el operador máximo a través de los operadores de medias (Legind Larsen, 2002).

En cualquiera de estos campos, los distintos escenarios en los que un sistema puede necesitar agregar información suelen clasificarse, de acuerdo con la naturaleza del problema planteado, en dos grandes grupos (Cubillo, Pradera & Trillas, 1998):

- Agregación de información para la toma de decisiones: Engloba todas aquellas situaciones en las que se dispone de varias opiniones o criterios distintos y se pretende tomar una decisión lo más coherente posible con la información de partida.
- Agregación de información para la descripción o representación de objetos: Es necesaria cuando se dispone de varias informaciones relativas a un mismo objeto pero complementarias y procedentes de fuentes - expertos, sensores, etc. - distintas, y se pretende construir a partir de ellas una descripción global del objeto en cuestión.

Por otro lado es fácil comprobar que en la gran mayoría de los procesos de agregación las informaciones preliminares son a menudo inciertas y/o imprecisas, por lo que, en general, es conveniente disponer de un marco de trabajo que permita representar y manejar semejante vaguedad.

Aunque existen varios entornos matemáticos capaces de trabajar con conocimiento imperfecto (cálculo de probabilidades, teoría de la posibilidad, teoría de la evidencia), quizá el más importante de ellos sea la teoría de los subconjuntos borrosos o lógica borrosa.

Evidentemente no existe un único criterio para seleccionar los operadores de agregación, y esto ha hecho que se propongan algunas condiciones que se deben tener en cuenta para elegirlos (Zimmermann, 1991):

• Fuerza axiomática: En igualdad de condiciones, un operador es mejor cuanto menos limitado esté por los axiomas que satisface.

• Ajuste empírico: Además de que los operadores satisfagan ciertos axiomas o tengan ciertas cualidades formales, deben reflejar adecuadamente la realidad.

• Adaptabilidad: Los operadores tienen que adaptarse al contexto específico en el que se encuentran, esencialmente, mediante la parametrización.

• Eficiencia numérica: El esfuerzo computacional de cálculo es especialmente importante cuando se tienen que resolver problemas grandes. De hecho, en muchas ocasiones debe recurrirse a técnicas heurísticas capaces de encontrar soluciones de calidad aunque no sean necesariamente óptimas (Herrera, Herrera-Viedma, & Verdegay, 1996b).

• Compensación y rango de compensación: Cuanto mayor sea el grado en que se contrarrestan las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos agregados, el operador de agregación representará mejor las situaciones en las que unos atributos son compensados por otros.

• Comportamiento agregado: El grado de pertenencia de un conjunto borroso en el conjunto agregado depende muy frecuentemente del número de conjuntos combinados.

• Nivel de escala requerido de las funciones de pertenencia: Diferentes operadores pueden requerir diferentes niveles de escala (nominal, intervalo, ratio o absoluto) de información de pertenencia para ser admisibles. En igualdad de condiciones, se prefiere el operador que requiere el nivel de escala más bajo.

A su vez, Dubois y Prade proponen la siguiente clasificación de los operadores de agregación en función de su comportamiento (Dubois & Prade, 1985):

• Comportamiento conjuntivo o intolerante: Se desea que todos los criterios a combinar se satisfagan, y se representa mediante cualquier operador menor o igual que el mínimo. Las t-normas cumplen este requisito y pertenecen por lo tanto a esta categoría.

• Comportamiento disyuntivo o tolerante: Basta con que uno de los criterios se satisfaga para obtener una satisfacción global; está representado por cualquier operador mayor o igual que el máximo. En este caso las t-conormas resultan operadores adecuados.

• Comportamiento de compromiso. En muchas ocasiones, se desea obtener un resultado intermedio que no refleje ni la falta absoluta de compensación que supone el comportamiento conjuntivo ni la compensación total del comportamiento disyuntivo. Dicho comportamiento está presente en todos aquellos operadores comprendidos entre el mínimo y el máximo.

La clasificación anterior tiene el inconveniente de ser demasiado general y es incluso, como reconocen los propios autores, incompleta, ya que existen numerosos operadores - como por ejemplo las sumas simétricas - que presentan un comportamiento híbrido que no se corresponde con ninguna de las tres categorías anteriores (Pradera Gómez, 1999).

Genéricamente puede decirse que la agregación puntual de subconjuntos borrosos se traduce en la aplicación de un operador numérico de la forma $F : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, que, cuando verifica las condiciones de contorno $F(0, \ldots, 0) = 0$ y $F(1, \ldots, 1) = 1$ y es monótono y continuo, se lo denomina operador de agregación.

Debido a sus múltiples aplicaciones, la definición y estudio de operadores de este tipo ha proliferado, disponiéndose en la actualidad de una gran cantidad de propuestas en este sentido (Dubois & Prade, 1985), (Klir & Yuan, 1995), (Bouchon-Meunier, 1998).

3. Propiedades matemáticas de la agregación

Un aspecto importante relacionado con el estudio de los operadores de agregación es el de analizar qué propiedades deben cumplir, o simplemente qué propiedades cumplen los operadores propuestos.

En lo que respecta al primer punto, por lo general, ningún autor considera que estos operadores deban cumplir, de forma categórica, ninguna propiedad concreta, aunque sí citan algunas que consideran naturales, como son las condiciones de contorno, la monotonía o la continuidad de los operadores (Pradera Gómez, 1999).

Sin embargo, sí que es posible establecer una lista general de posibles propiedades matemáticas cuya verificación, en determinados casos, podría ser deseable (Aczél, 1966), (Dubois, 1983), (Dubois & Prade, 1985), (Dujmovié, 2012), (Dujmovié & De Tré, 2011), (Fodor & Roubens, 1995b), (Mayor, Suñer & Canet, 1998), (Mizumoto, 1989), (Nguyen, Kreinovich & Tolbert, 1994), (Nguyen & Walker, 1997), (Ovchinnikov, 1996), (Ovchinnikov, 1998).

Las principales propiedades son las siguientes:

- Condiciones de contorno: $F(0,...,0) = 0$, $F(1,...,1) = 1$.
- Continuidad: F es una función continua en cada una de sus variables. Con esta propiedad se asegura que la existencia de pequeñas variaciones en los datos no provoque grandes saltos en el resultado.
- Monotonía no decreciente (en cada variable): Para todo $i \in \{1,\ldots, n\}$, si $x_i > x'_i$, entonces $F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \geq F(x_1,\ldots,x'_i,\ldots,x_n)$. Mediante esta propiedad se describe el hecho de que si los datos de entrada aumentan, el resultado de su combinación no puede decrecer.
- Simetría (o conmutatividad, neutralidad, anonimato): Sea $I = [0, 1]$; para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in I^n$, $F(x_1,\ldots,x_n) = F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$; siendo σ una permutación cualquiera de $\{1,\ldots, n\}$. Esta propiedad establece que el orden de los datos de entrada no debe afectar al resultado obtenido, siendo todos ellos tratados de la misma forma.
- Idempotencia (o unanimidad, identidad): Sea $I = [0, 1]$; para todo $x \in I$, $F(x,\ldots, x) = x$. La idempotencia es una generalización de las condiciones de contorno a cualquier punto del universo. Establece que si todos los datos de entrada son los mismos, el resultado de su combinación debe coincidir con ellos.
- Asociatividad: $(n = 2)$ Para todo $x_1, x_2, x_3 \in I$, $F(x_1, F(x_2, x_3)) = F(F(x_1, x_2), x_3)$. Esta propiedad permite extender de forma inmediata, consistente y sin ambigüedad operadores definidos sobre dos variables a cualquier número de argumentos.
- Bisimetría: $(n = 2)$ Para todo $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, $F(F(x_1, x_2), F(x_3, x_4)) = F(F(x_1, x_3), F(x_2, x_4))$. La propiedad de bisimetría, menos fuerte que la asociatividad, asegura que el resultado de combinar en grupos de dos los datos de entrada no depende de la elección de dichos grupos. Toda función asociativa y conmutativa es bisimétrica.
- Autodistributividad: $(n = 2)$ Para todo $x_1, x_2, x_3 \in I$, $F(x_1, F(x_2, x_3)) = F(F(x_1, x_2), F(x_1, x^3))$ (por la izquierda). $(n = 2)$ Para todo $x_1, x_2, x_3 \in I$, $F(F(x_1, x_2), x_3) = F(F(x_1, x_3), F(x_2, x_3))$ (por la derecha). Toda función idempotente y bisimétrica es autodistributiva. Toda función estrictamente creciente y autodistributiva es idempotente.
- Compensación (o propiedad de Pareto, de promedio o de media): Para todo $(x_1,\ldots, x_n) \in I^n$, $\min(x_1,\ldots, x_n) \leq F(x_1,\ldots, x_n) \leq \max(x_1,\ldots, x_n)$. La propiedad de compensación asegura que el resultado obtenido será un valor de compromiso situado entre el mínimo y el máximo de todos los datos de entrada. Si F cumple la propiedad de compensación, entonces F es idempotente. Si F es monótona no decreciente e idempotente, entonces F cumple la propiedad de compensación.
- Homogeneidad: Para todo $(x_1,\ldots, x_n) \in I^n$ y para todo $t \in R$, $t > 0$, $F(tx_1,\ldots, tx_n) = tF(x_1,\ldots, x_n)$.
- Translatividad: Para todo $(x_1,\ldots, x_n) \in I^n$ y para todo $t \in R$, $F(x_1 + t,\ldots, x_n + t) = F(x_1,\ldots, x_n) + t$.
- Estabilidad (o invarianza): Para todo $(x_1,\ldots, x_n) \in I^n$, $F(f(x_1),\ldots, f(x_n)) = f(F(x_1,\ldots, x_n))$, siendo $f : R \rightarrow R$ una función continua y creciente. Es una generalización de las propiedades de homogeneidad y translatividad.
- ϕ-Comparabilidad: Para todo $(x_1,\ldots, x_n)$, $(y_1,\ldots, y_n) \in I^n$, si $F(x_1,\ldots, x_n) < F(y_1,\ldots, y_n)$, entonces $F(\phi(x_1),\ldots, \phi(x_n)) < F(\phi(y_1),\ldots, \phi(y_n))$ siendo $\phi : R \rightarrow R$ un automorfismo. La función ϕ se interpreta como un cambio de escala. Si F es estable bajo una transformación lineal positiva, entonces F es ϕ-comparable. Si F es ϕ-comparable e idempotente, entonces F es estable bajo una transformación lineal positiva.
- Sensibilidad: Se define como un valor que permite medir el comportamiento de un operador ante la introducción de pequeños cambios en los valores de entrada. Se han establecido dos niveles de sensibilidad:

- Sensibilidad extrema (en el peor caso):

$$\rho_F(\delta) = \bigvee_{|x_i - y_i| \leq \delta} |F(x) - F(y)|$$

- Sensibilidad media:

$$S(F) = \int_{[0,1]^n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$$

- La t-norma min y la t-conorma max son las que tienen menor sensibilidad extrema de entre todas las t-normas y t-conormas.

- La t-norma producto xy y la t-conorma suma algebraica x + y — xy son las que tienen menor sensibilidad media entre todas las t-normas y t-conormas.

- La sensibilidad (extrema o media) de una t-norma coincide con la sensibilidad (extrema o media) de su t-conorma dual respecto de la negación estándar.

- Funciones localmente internas: Para todo $(x_1,\ldots, x_n) \in I^n$, $F(x_1,\ldots, x_n) \in \{x_1,\ldots, x_n\}$. Un ejemplo trivial de operadores que la verifican son los estadísticos de orden. Cabe destacar que algunos operadores de agregación - como las medias ponderadas u OWA - resultan ser combinaciones lineales convexas de funciones localmente internas.

4. Breve reseña de los principales operadores de agregación

Los operadores incluidos se han dividido, de acuerdo con su posición respecto a los operadores mínimo y máximo, en cuatro grandes grupos (Dubois & Prade, 1985):

- Menores o iguales que el mínimo: Son aquellos que exigen que todos los criterios agregados se satisfagan de forma simultánea, y por lo tanto el resultado de la agregación estará acotado superiormente por el menor de los distintos grados de satisfacción agregados. Esta clase, cuyos componentes se denominan habitualmente operadores de intersección, incluye a las conocidas normas triangulares.
- Mayores o iguales que el máximo: Son aquellos que generan un resultado que está acotado inferiormente por el mayor de los elementos agregados. Se denominan operadores de unión y su máximo exponente es la familia de las conormas triangulares.
- Comprendidos entre el mínimo y el máximo: Son aquellos que, al contrario que en los dos casos extremos anteriores, describen una actitud de compensación o promediación de valores, devolviendo un valor comprendido entre ambos extremos, y que se podrían denominar operadores de promedio.
- Híbridos: Son todos aquellos que presentan una actitud mixta y que por lo tanto no pertenecen a ninguno de los tres grupos anteriores.

4.1. Operadores de intersección ($F \leq$ min)

En este grupo se distinguen especialmente las normas triangulares (t-normas) (Pradera Gómez, 1999).

4.1.1. T-normas

El máximo exponente de los operadores de intersección lo constituyen las normas triangulares o t-normas (Aczél, 1966), (Alsina, Trillas & Valverde, 1980), (Alsina, Trillas & Valverde, 1983), (Alsina, Trillas & Valverde, 1983a), (Bellman & Giertz, 1973), (Dujmovié, 2012), (Dujmovié & De Tré, 2011), (Fodor, 2004), (Frank, 1979), (Gupta & Qi, 1991), (Ling, 1965), (Mayor & Torrens, 1988), (Ralescu & Ralescu, 1997), (Schweizer & Sklar, 1961), (Torra, 1997), (Mayor & Martín, 1998), (Yager & Rybalov, 1997), (Calvo & Mesiar, 2003a).

Definición: Sea $I = [0, 1]$; una norma triangular o t-norma es una función T: $I \times I \rightarrow I$ que verifica las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z, t \in I$:

- T(x, y) = T(y, x) (conmutatividad).
- T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) (asociatividad).
- Si x ≤ z e y ≤ t, T(x, y) ≤ T(z, t) (monotonía).
- T(x, 1) = x (elemento neutro 1).

4.2. Operadores de unión (F ≥ max)

En este grupo se distinguen especialmente las conormas triangulares (t-conormas) (Pradera Gómez, 1999).

4.2.1. T-conormas

Definición: Sea I = [0, 1]; una conorma triangular o t-conorma es una función S: I x I → I que verifica las siguientes propiedades para cualesquiera x, y, z, t ϵ I:

- S(x, y) = S(y, x) (conmutatividad).
- S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z) (asociatividad).
- Si x ≤ z e y ≤ t, S(x, y) ≤ S(z, t) (monotonía).
- S(x, 0) = x (elemento neutro 0).

Las t-conormas se obtienen mediante dualidad a partir de las t-normas: una función S: I x I → I es una t-conorma si T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) es una t-norma.

4.3. Operadores de promedio (min ≤ F ≤ max)

Estos operadores aseguran la obtención de un resultado intermedio comprendido entre el mínimo y el máximo. Todos ellos tienen la propiedad de ser idempotentes. Las familias más importantes de operadores de este tipo son: las medias cuasi-lineales, los mínimos y máximos ponderados - introducidos en el marco de la teoría de la posibilidad -, las medias ponderadas ordenadas y las integrales borrosas (Pradera Gómez, 1999).

4.3.1. Medias cuasi-lineales

Estos operadores también han sido ampliamente estudiados (Aczél, 1966), (Dubois & Prade, 1985), (Dyckhoff & Pedrycz, 1984), (Klir & Yuan, 1995), (Trillas, Cubillo & Castro, 1995), (Fernández-Salido & Murakami, 2003), (Calvo & Mesiar, 2003b), (Fodor, Marichal & Roubens, 1995), (Smolíkova & Wachowiak, 2002).

Definición: Una media cuasi-lineal es una función $M_{f,w}$: $I^n \to I$ definida, para todo $(x_1,\dots, x_n)$ de I^n, por:

$$M_{f,w}(x_1,\dots,x_n) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\right)$$

siendo f: I → R una función continua y estrictamente monótona denominada función generadora de la media y $w^t = (w_1, \dots ,w_n)$ un vector de pesos tal que w_i ϵ I y verificando que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

A continuación se indican las principales sub-clases de esta familia de operadores.

4.3.1.1. Medias ponderadas

Las medias ponderadas constituyen un caso particular de medias cuasi-lineales construidas tomando como función generadora la función identidad, f(x) = x:

Definición: Una media ponderada es una función M_w: $I^n \to I$ definida, para todo $(x_1,\dots, x_n)$ de I^n por:

$$M_w(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right)$$

siendo $w^t = (w_1, \dots, w_n)$ un vector de pesos tal que $w_i \in I$ y verificando que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

4.3.1.2. Medias cuasi-aritméticas

Las medias cuasi-aritméticas constituyen un caso particular de medias cuasi-lineales en las que el vector de pesos es tal que $w_i = 1/n$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$:

Definición: Una media cuasi-aritmética es una función M_f: $I^n \to I$ definida, para todo $(x_1,\dots, x_n)$ de I^n por:

$$M_f(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

siendo f: $I \to R$ una función continua y estrictamente monótona denominada función generadora de la media.

4.3.1.3. Medias generalizadas

Un caso particular y muy común de medias cuasi-lineales lo constituyen las denominadas medias generalizadas, obtenidas cuando se toma como función generadora de la media una función del tipo $f(x) = x^{\alpha}$ con $\alpha \in R^*$:

Definición: Una media generalizada es una función $M_{\alpha,w}$: $I^n \to I$ definida, para todo $(x_1,\dots, x_n)$ de I^n por:

$$M_{\alpha,w}(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

siendo α un parámetro perteneciente a R^* y $w^t = (w_1, \dots, w_n)$ un vector de pesos tal que $w_i \in I$ y verificando que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

De esta última familia cabe destacar los siguientes operadores, obtenidos al tomar el vector de pesos $w_i = 1/n$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$:

Mínimo: $M_{-\infty}(x_1,\dots, x_n) = \min(x_1,\dots, x_n)$.
Media armónica:

$$M_{-1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}.$$

Media geométrica: $M_0(x_1,\dots, x_n) = (x_1 \times x_2 \dots x_n)^{1/n}$.
Media aritmética:

$$M_1(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)\right).$$

Máximo: $M_{+\infty}(x_1,\dots, x_n) = \max(x_1,\dots, x_n)$.

4.3.2. Mínimos y máximos ponderados

Los mínimos y máximos ponderados fueron desarrollados como una generalización de los operadores min y max (Dubois, 1983), (Dubois & Prade, 1985), (Dubois & Prade, 1986):

Definición: Se llama mínimo ponderado y máximo ponderado, respectivamente, a las funciones w-min, w-max: $I^n \to I$ definidas para todo $(x_1,\dots, x_n)$ de I^n por:

$w\text{-}\min(x_1,\dots,x_n)=\min(\max(x_i,1-w_i))$ $(i=1,\dots,n)$ y w-max(x_1,…,x_n)=max(min(x_i,w_i)) (i=1,…,n)

siendo w^t = (w_1, … ,w_n) un vector de pesos normalizado tal que max (w_i) = 1 (i = 1, …, n).

El primer operador describe una medida de necesidad, mientras que el segundo describe una medida de posibilidad. Cuando todos los criterios a agregar tienen la misma importancia (w_i = 1 para todo i), se obtienen, respectivamente, los operadores mínimo y máximo.

4.3.3. Medias ponderadas ordenadas (OWA)

Las medias ponderadas ordenadas (Ordered Weighted Averaging, OWA) fueron introducidas por Yager en 1988 como un nuevo operador de compensación. Permiten la introducción de pesos, y son por lo tanto parecidas a las medias ponderadas. La diferencia fundamental entre estas últimas y el nuevo operador estriba en que, en este último caso, los pesos no afectan a un determinado criterio sino a la posición que cada criterio ocupa al ordenarlos: cada peso wi se asocia con el i-ésimo elemento más grande, independientemente de cuál sea éste (Yager, 1988), (Yager & Kelman, 1996), (Herrera, Herrera-Viedma & Verdegay, 1996b), (Mesiar & Komorníková, 1998), (Filev & Yager, 1998), (Herrera, Herrera-Viedma & Chiclana, 2003), (Liu, 2006), (Llamazares, 2007), (Peláez & Doña, 2003, 2003a, 2006), (Peláez, Doña & Mesas, 2005), (Peláez, Doña & Gil, 2006), (Peláez, Doña & Gómez-Ruiz, 2007), (Peláez, Doña & La Red, 2003, 2003a, 2008), (Peláez, Doña, La Red & Mesas, 2004), (Peláez, Doña, Mesas & La Red, 2004), (Doña, Gil, La Red & Peláez, 2011).

Definición: Un operador OWA se define como $F:R^n \rightarrow R$ que tiene asociado un vector n

$W=[w_1,w_2,\ldots,w_n]^T$

tal que

$$w_i \in [0,1] \text{ y } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Además

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j$$

donde b_j es el j° mayor de los a_i.

Un aspecto fundamental de los operadores OWA es el paso de la reordenación. Un agregado xi no está asociado con un peso particular w_j, sino que un peso está asociado con una posición ordenada j particular de los argumentos. Esta ordenación introduce la no linealidad en el proceso de agregación (Carlsson & Fuller, 2002).

Los operadores OWA han sido aplicados en diferentes áreas, como toma de decisiones multi-criterio (Yager, 1988), (Merigó, Casanovas & Martínez, 2010); sistemas expertos (O'Hagan, 1988); y toma de decisiones en grupo difusa (Marimin et al., 1998), (Peláez, Doña & Gómez-Ruiz, 2007).

Se hace notar que diferentes operadores OWA se distinguen por su función de ponderación o peso. En (Yager, 1988) se indican tres importantes casos especiales de agregaciones OWA:

1. F^* . En este caso $W = W^* = [1, 0, \ldots, 0]^T$.
2. F^* . En este caso $W = W^* = [0, 0, \ldots, 1]^T$.
3. F_{ave}. En este caso

$$W = W_{ave} = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right]^T .$$

Se han sugerido diferentes enfoques para la determinación de las ponderaciones utilizadas en el operador OWA, por ejemplo, máxima entropía, método de aprendizaje, cuantificadores difusos, variabilidad mínima, etc. (Marimin, Umano, Hatono & Tamura, 1998). Uno de ellos permite obtener los pesos en función de cuantificadores lingüísticos. En este caso los cuantificadores se definen como una función $Q:[0,1] \rightarrow [0,1]$ donde $Q(0)=0$, $Q(1)=1$ y $Q(x)>=Q(y)$ para $x>y$.

Zadeh (Zadeh, 1983) define la función Q como sigue:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad b < x \end{cases}$$

con a, b, x ϵ [0, 1].

Para un valor dado x ϵ [0, 1] , Q(x) es el grado en que x cumple el concepto difuso, representado por el cuantificador. Basado en la función Q, el vector OWA se determina a partir de Q de la siguiente manera:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

Estos pesos tienen la función de aumentar o disminuir la importancia de los diferentes componentes de la agregación de acuerdo con la semántica asociada con Q, es decir, el cuantificador determina la estrategia de construcción del vector de ponderación.

Los operadores OWA podrían considerarse como un caso particular de una familia más grande de operadores, que se podría denominar media cuasi-lineal ordenada, y que vendría dada por la siguiente definición (Pradera Gómez, 1999):

Definición: Una media cuasi-lineal ordenada es una función $O_{f,w}$: $R^n \rightarrow R$ definida, para todo $(x_1,\ldots, x_n)$ de R^n, por:

$$O_{f,w}(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_{\sigma(i)}\right)\right)$$

siendo f: $R \rightarrow R$ una función continua y estrictamente monótona denominada función generadora de la media, $w^t = (w_1, \ldots, w_n)$ un vector de pesos tal que $w_i \in R$ y verificando

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

y donde $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $x_{\sigma(i-1)} \geq x_{\sigma(i)}$ para todo i = 2, …, n.

Un OWA es un operador de compensación (y por lo tanto idempotente), monótono no decreciente en cada variable, conmutativo y homogéneo.

La media aritmética constituye un caso particular de OWA, obtenido al tomar todos los pesos iguales a 1/n. Lo mismo ocurre con los denominados estadísticos de orden, obtenidos al tomar vectores de pesos formados enteramente por ceros salvo un uno en la posición adecuada, y que incluyen a su vez a los operadores mínimo y máximo.

Definición: El k-ésimo estadístico de orden (k ϵ {1, …, n}) es una función $x^{(k)}$: $R^n \rightarrow R$ definida, para todo $(x_1,\ldots, x_n)$ de R^n, por:

$$x^{(k)}(x_1,\ldots,x_n) = y_k$$

donde y_k es el k-ésimo elemento más pequeño de $(x_1,\ldots, x_n)$.

Algunos de los operadores OWA más difundidos son los siguientes (Doña Fernández, 2008):

4.3.3.1. ME-OWA

La primera familia de operadores OWA parametrizados fueron definidos por O'Hagan (1987, 1988). Esta familia de operadores se denominó ME-OWA, refiriéndose las siglas ME a Máxima Entropía. El procedimiento desarrollado para el cálculo de los pesos es el siguiente: En primer lugar se selecciona un valor deseado de orness (tomando un valor optimista) ; a continuación se determinan aquellos pesos que permiten obtener el valor deseado con máxima dispersión (entropía). En particular se resuelve el siguiente problema de programación:

$$\text{Maximizar}\left(-\sum_{i}^{n}(w_i \ln w_i)\right)$$

Sujeto a las restricciones conocidas

1. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$
2. $w_i \in [0,1]$

A las que se les añade

3. $\alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{i}^{n}(n-i)\cdot w_i$

Se puede observar cómo a través de un único parámetro α se obtienen el total de los pesos del sistema deseado, siguiendo este proceso la filosofía de las técnica de máxima entropía. Una extensión de los operadores ME-OWA es la que usa como medida de entropía $1\text{-}Max_i[w_i]$, lo que equivale a tener como función objetivo minimizar el $Max_i[w_i]$.

4.3.3.2. S-OWA

Otra familia de operadores OWA son los S-OWA. Estos operadores son clasificados en dos subfamilias según sean del tipo *or* o del tipo *and.*

Los operadores S-OWA del tipo *or* se denotados como FSO definen sus pesos como sigue:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\alpha)+\alpha & i=1 \\ \frac{1}{n}(1-\alpha) & i=2,\ldots,n \end{cases}$$

Usando esta definición, se obtiene una forma de agregación de interés

$$F_{SO}(a_1,\ldots,a_n) = \alpha\, \underset{i}{Max}(a_i) + \frac{1}{n}(1-\alpha)\sum_i a_i$$

Lo que permite generar un promedio ponderado entre el máximo y la media de los valores a agregar. En el caso de que α = 0 se obtiene

$$\frac{1}{n}\sum a_i$$

y en el caso de $\alpha = 1$ $Max(a_i)$. Es decir

$$F_{so} = \alpha F^* + (1-\sigma)F_A$$

La medida de orness de esta forma de agregar se calcula como sigue:

$$orness(F_{SO}) = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$$

Se observa como para $\alpha \in [0, 1]$, el valor del *orness* se sitúa en [0.5, 1]. Por esta razón, el operador FSO puede ser visto como una medida del tipo *or*. Además, conforme aumenta el *orness*, se incrementa el valor de α. En particular, cuando $\alpha = 1$, obtenemos un *orness*(FSO) = 1 y cuando $\alpha = 0$, *orness*(FSO) = 0.5, por lo que en este caso estaremos usando una media simple.

La segunda clase de operadores S-OWA, denotados como FSA son los catalogados dentro del tipo *and*, y se definen como sigue:

$$w_i = \frac{1}{n}(1-\beta), \quad i \neq n$$
$$w_n = \frac{1}{n}(1-\beta) + \beta$$

donde $\beta \in [0, 1]$. Usando estos pesos, obtenemos

$$F_{SA}(a_1,\ldots,a_n) = \beta \underset{i}{Min}(a_i) + \frac{1}{n}(1-\beta)\sum_i a_i$$

En este caso se obtiene un promedio ponderado entre los valores mínimos y promedio del conjunto a agregar. Es claro que

$$F_{SA} = \beta F_* + (1-\beta)F_A$$

Siendo su medida de orness:

$$orness(F_{SA}) = \frac{1}{2}(1-\beta)$$

Por lo que se va a encontrar siempre entre los valores 0.5 y 0. De esta forma si se calcula el a*ndness* se consigue un valor que se situará entre 1 y 0.5. Al igual que en el caso anterior, si se toma $\beta = 0$ se obtiene FAV, de lo que se desprende que la media aritmética o FAV es un operador situado entre el *and* y *or*.

Estos operadores presentan unas propiedades muy útiles. Primero, dado un valor de *orness*, λ, es muy fácil generar los pesos asociados con la agregación expresada por dicho valor.

Si $\lambda \geq 0.5$ se usa un S-OWA del tipo *or* con $\alpha = 2\lambda - 1$.
Si $\lambda < 0.5$ se usa un S-OWA del tipo *and* con $\beta = 1 - 2\lambda$.

Una vez obtenidos los pesos, el cálculo de la agregación es muy simple, únicamente es necesario el sumatorio de los elementos más el Max o Min de la agregación.

En (Yager & Filev, 1992) se usa este tipo de operadores para generar una nueva clase de controladores lógicos flexibles con lógica borrosa.

Este operador presenta ventaja de permitir combinar las dos familias de operadores α, β vistos produciendo un operador S-OWA generalizado. Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$ con $\alpha + \beta <= 1$, se define:

$$w_1 = \frac{1}{n}(1-(\alpha+\beta))+\alpha$$

$$w_i = \frac{1}{n}(1-(\alpha+\beta)), \text{ i = 2, 3, ... , } n\text{-1}$$

$$w_n = \frac{1}{n}(1-(\alpha+\beta))+\beta$$

Esta generalización se denota como F_s siendo su fórmula general:

$$F_s(a_1,...,a_n) = \alpha \underset{i}{Max}[a_i] + \beta \underset{i}{Min}[a_i] + (1-(\alpha+\beta))\sum_i a_i$$

4.3.3.3. Step-OWA

Los operadores Step OWA u operadores del tipo escalón (Yager, 1993), se denotan como $F_{step}(k)$ y definen sus pesos como sigue:

$w_k = 1$
$w_i = 0, i \neq k$

Como se puede observar, con los operadores step-OWA, se obtiene un único peso distinto de cero, el cual se corresponde exactamente con el peso k. Si k = 1 obtendremos el operador F*, mientras que cuando tengamos k = n se generará F*.

Es fácil comprobar que $F_{step(k)}=(a_1,...,a_n)=b_k$ donde b_k se corresponde con el k-ésimo elemento mayor del conjunto de elementos, siendo éste el resultado de la agregación.

La dispersión asociada a este operador se puede calcular como

$$Disp(F_{step(k)}) = -\sum w_i \ln w_i = 0$$

Por lo que es considerado como una agregación de entropía mínima.

La medida de *orness* asociada con este operador se calcula como:

$$orness(F_{step(k)}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)\cdot w_i = \frac{n-k}{n-1}$$

Para estos cuantificadores $w_k = 1$ si

$$\frac{k-1}{n} < \gamma \leq \frac{k}{n}$$

Siempre con $\gamma>0$.

Semánticamente este cuantificador se interpreta como al menos γ por ciento. Si n se considera fija, entonces se interpreta como al menos n γ .

4.3.3.4. Window-OWA

Los operadores del tipo window, se caracterizan por usar dos parámetros, k y m para poder determinar los pesos de la agregación. Estos operadores se denotan como F_w y se definen como sigue:

$$w_i = \begin{cases} 0 & si \quad i < k \\ \dfrac{1}{m} & si \quad k \le i < k+m \\ 0 & si \quad i \ge k+m \end{cases}$$

Siendo k y m números enteros positivos tal que k+n<=n+1 , donde n representa la cardinalidad de la agregación OWA. Es fácil comprobar que los operadores del tipo window tienen un total de m pesos distintos de cero y todos con el idéntico valor

$$\frac{1}{m}$$

siendo k la posición donde comienza el vector no nulo.

Un vector típico para este caso es, por ejemplo

$$W = [0 \ 0 \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ 0]$$

Usando este tipo de pesos se obtiene la fórmula general para el operador

$$F_w(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{m}\sum_{j=k}^{k+m-1} b_j$$

donde b_j es el j-ésimo valor mayor de los a_i. Como se observa, este operador establece una "ventana" para la colección de elementos ordenados comenzando desde la posición k dentro de la cual se realiza un promedio de los elementos de la agregación.

La entropía o dispersión asociada a este tipo de agregación es fácilmente calculable a través de la expresión

$$Disp(F_w) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \ln w_i = -\sum_{i=k}^{k+m-1} \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} = -\ln \frac{1}{m} = \ln m$$

Es interesante comprobar cómo la dispersión es siempre relativa al número de elementos que se agregan, a mayor número de elementos, mayor dispersión.

El grado de orness asociado a este operador se calcula con la siguiente expresión

$$orness(F_w) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_i$$

$$orness(F_w) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=k}^{k+m-1}(n-i)w_i = \frac{1}{n-1}\frac{1}{m}\sum_{i=k}^{k+m-1}(n-i) = \frac{1}{n-1}(n-k-\frac{1}{2}(m-1))$$

Al incrementar k o m se disminuye el orness(F_w). Se puede comprobar cómo en el caso de que m sea 1 se obtiene un cuantificador del tipo escalón.

4.3.3.5. Neat-OWA

Otra de las familias de operadores OWA de mayor importancia son los denominados neat-OWA, que se caracterizan, en este caso, porque los pesos dependen de los valores a agregar.

En la definición de los operadores OWA se indicó que

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j$$

donde b_j es el j-ésimo valor mayor de las a_n, con la restricción para los pesos de satisfacer

$$(1)\ w_i \in [0,1] \text{ y } (2)\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 .$$

En todas las definiciones anteriores, se asume que los pesos son valores fijos constantes. No obstante, para esta familia de operadores los pesos serán calculados en función de los elementos que se agregan, o más exactamente de los valores a agregar ordenados, los bj, manteniéndose las condiciones (1) y (2). Es este caso los pesos son: $w_i=f_i(b_1,\ldots,b_n)$, definiéndose el operador

$$F(a_1,\ldots a_n) = \sum_i f_i(b_1,\ldots,b_n) \cdot b_i$$

Para esta familia, donde los pesos dependen de la agregación, no se exige la satisfacción de todas las propiedades de los operadores OWA

Toda agregación de elementos debe estar siempre entre los valores producidos por las funciones F^* y F_* .

El operador es idempotente $F(a,\ldots,a)=a$

El operador es conmutativo, es decir, el orden de los elementos a_i no es relevante.

Una propiedad que no es necesariamente satisfecha para esta familia de operadores es la monotonía. Sean $A=(a_1,\ldots,a_n)$ y $C=(c_1,\ldots,c_n)$ dos conjuntos a agregar tales que $a_i>=c_i$ para toda i. Si los pesos se mantienen constantes entonces

$$F(A) \geq F(C)$$

Como se puede comprobar, en el caso de que los pesos dependan de los elementos a agregar, al cambiar los valores los w_i también pueden cambiar, por lo que no se puede asegurar que se satisfaga esta propiedad para todos los casos.

Además, para poder afirmar que un operador de agregación es *neat*, es necesario que el valor final de agregación sea independiente del orden de los valores. Sea $A=(a_1,\ldots,a_n)$ las estradas a agregar, sea $B=(b_1,\ldots,b_n)$ las entradas ordenadas y $C=(c_1,\ldots,c_n)=Perm(a_1,\ldots,a_n)$ una permutación de las entradas. Formalmente se define un operador OWA como *neat* si

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot b_i$$

Produce el mismo resultado para cualquier asignación C = B.

Un típico ejemplo de operador OWA neat es cuando

$$w_i = \frac{1}{n} .$$

Por lo que

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

En este caso, como los pesos son fijos, esta es la única expresión de cálculo para el operador. Por otro lado, es usual que al depender los pesos de los valores a agregar surjan distintos tipos de operadores *neat* dentro de la misma familia.

Una de las características a señalar de los operadores *neat* OWA es que no necesitan ser ordenados para su proceso. Esto implica que la formulación de un operador *neat* puede ser definida usando directamente los argumentos en lugar de los elementos ordenados.

Una primera familia de operadores cuyos pesos dependen de la agregación son los denominados BADD-OWA (Yager & Filev, 1992).

En este caso, el operador define sus pesos como:

$$w_i = \frac{b_i^{\alpha}}{\sum_i b_i^{\alpha}}, \quad \alpha \geq 0$$

Se puede comprobar que se satisfacen satisfacer las condiciones:

1. $w_i \in [0,1]$
2. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Por lo que la función de pesos puede ser aceptada como válida.

Para este operador la función quedaría como sigue:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\sum_i b_i^{\alpha+1}}{\sum_i b_i^{\alpha}}$$

Donde se puede comprobar fácilmente que es un operador de la clase neat que no necesita del proceso de ordenación de los argumentos

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\sum_i a_i^{\alpha+1}}{\sum_i a_i^{\alpha}}, \quad \alpha \geq 0$$

Se observa como cuando $\alpha=0$ se obtiene

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_i a_i$$

que se corresponde con la media aritmética o promedio simple F_{ave}. Cuando $\alpha=1$, se obtiene

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\sum_i a_i^2}{\sum_i a_i}$$

Cuando $\alpha \to \infty$ se obtiene

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = Max[a_i] = F^*(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

En (Yager & Filev, 1992) se muestra cómo estos operadores no son monótonos respecto a los argumentos. Para comprobar la no monotonía consideraremos el caso donde $n = 2$ y $\alpha = 1$. En este caso

$$F(a_1, a_2) = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2}$$

Si asignamos los valores $a_1=1$ y $a_2=0.2$, entonces la función agregada vale

$$F(1,0.2) = \frac{1+0.04}{1.2} = 0.866$$

Si asignamos los valores $a_1=1$ y $a_2=0.3$, en este caso la función agregada valdrá

$$F(1,0.3) = \frac{1+0.09}{1.3} = 0.838$$

a pesar de que el valor correspondiente al segundo término ha sido incrementado en una décima de unidad.

Otros muchos operadores tradicionales pueden ser catalogados como operadores *neat* OWA, ya que satisfacen las propiedades necesarias para ser agrupados como miembros de esta clase, ejemplos de estos operadores son la media aritmética o la media armónica.

4.3.4. Medias ponderadas ordenadas ponderadas (WOWA)

En 1997 Torra propone un nuevo operador para la combinación de información, que denomina Weighted Ordered Weighted Averaging (WOWA), construido como una mezcla de dos operadores: las clásicas medias ponderadas y las medias ponderadas ordenadas (OWA) de Yager (Torra, 1997).

Su definición es la siguiente:

Definición: Una WOWA es una función $O_{w,p}$: $R^n \rightarrow R$ definida, para todo $(x_1,\ldots, x_n)$ de R^n por:

$$O_{w,p}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\sigma(i)}$$

donde $w^t = (w_1, \ldots, w_n)$ y $p^t = (p_1, \ldots, p_n)$ son vectores tales que w_i, $p_i \in R$ que verifican

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$$

es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x_{\sigma(i-1)} \geq x_{\sigma(i)}$$

para todo $i = 2, \ldots, n$ y los pesos λ_i se definen como:

$$\lambda_i = W^*\left(\sum_{j\leq i} p_{\sigma(j)}\right) - W^*\left(\sum_{j<i} p_{\sigma(j)}\right)$$

siendo W^*: $R \rightarrow R$ una función monótona creciente que interpola los puntos

$$\left(\frac{i}{n}, \sum_{j\leq i} w_i\right)$$

junto con el punto (0,0).

4.3.5. Integrales borrosas

Las definiciones básicas son las siguientes (Grabisch, 1995), (Grabisch, 1996), (Grabisch, 1998), (De Soto & Trillas, 1998):

Definición: Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de criterios y P(X) el conjunto de las partes de X. Una medida borrosa es una función μ:P(X)→I que verifica los siguientes axiomas: a) $\mu(\phi)= 0$, $\mu(X)=1$; b) si $A \subseteq B$ entonces $\mu(A)\leq \mu(B)$ para cualesquiera A, B $\in$ P(X).

Definición: Sea μ una medida borrosa definida sobre un conjunto de criterios $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La integral discreta de *Sugeno* de n valores $a_1, \dots, a_n$ de [0,1] se define de la siguiente forma:

$$S_\mu(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{i=1}^{n} \left(a_{(i)} \bigwedge \mu(A_{(i)}) \right)$$

siendo $a_{(i)}$, con $i \in \{1, \dots, n\}$, una permutación de a_i tal que $a_{(1)} \leq \dots \leq a_{(n)}$, $A_{(i)}$ el conjunto $\{x_{(i)}, \dots, x_{(n)}\}$ y donde $\vee$ y $\wedge$ representan, respectivamente, el máximo y el mínimo.

Definición: Sea μ una medida borrosa definida sobre un conjunto de criterios $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. La integral discreta de *Choquet* de n valores $a_1, \dots, a_n$ de [0,1] se define de la siguiente forma:

$$C_\mu(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_{(i)} - a_{(i-1)}) \mu(A_{(i)})$$

con la misma notación que en la definición anterior y siendo además $a_{(0)} = 0$.

4.4. Operadores híbridos

Estos operadores se pueden clasificar en tres grandes grupos (Pradera Gómez, 1999):

- Operadores que se construyen a partir de la combinación, en algún sentido, de una t-norma y una t-conorma. En los casos extremos, estos operadores son t-normas o t-conormas.
- Operadores, denominados normas, que se definen de forma muy similar a las t-normas o t-conormas pero suavizando las condiciones de contorno exigidas a éstas, y que incluyen por lo tanto a ambas. Este grupo consta de una importante familia de funciones denominadas uni-normas.
- Sumas simétricas, que constituyen una clase especial de operadores que tienen la particularidad de ser auto-duales, y, algunos de ellos, asociativos.

Estos operadores han sido ampliamente estudiados, mencionándose a modo de ejemplo algunos trabajos relevantes referidos a algunos de estos operadores:

- Combinaciones exponenciales: (Dubois & Prade, 1985), (Turksen, 1986), (Zadeh, 1973), (Zimmermann & Zysno, 1980).
- Operadores intervalo-valorados construidos mediante formas normales: (Trillas, Pradera & Cubillo, 1999), (Turksen, 1986).
- T-S-Agregaciones: (Alsina, Mayor, Tomás & Torrens, 1993), (Fodor & Calvo, 1998), (Luhandjula, 1982), (Mayor, 1984), (Mayor, 1984a), (Mayor & Trillas, 1986), (Mayor & Calvo, 1997), (Turksen, 1986), (Zadeh, 1973).
- Combinaciones no lineales: (Mesiar & Komorníková, 1998), (Yager & Rybalov, 1997), (Yager, 1996).
- Operadores construidos mediante generadores aditivos: (Mesiar & Komorníková, 1998).
- Uni-normas: (Fodor, Yager & Rybalov, 1997), (Yager & Rybalov, 1996).
- λ-medias: (Klir & Yuan, 1995), (Dubois & Prade, 1985).
- Sumas simétricas: (Dombi, 1982), (Dubois & Prade, 1985), (Klement, Mesiar & Pap, 1996), (Silvert, 1979).

4.5. Medidas de comportamiento

Una cuestión interesante es considerar el carácter actitudinal del operador de agregación. Se pueden definir las siguientes medidas:

Grado de disyunción (orness): el grado de orness es una medida de la tolerancia del decisor. Decisores tolerantes pueden aceptar que se cumplan sólo algunos criterios; esto corresponde a un comportamiento disyuntivo (orness > 0,5), cuyo ejemplo extremo es max. Por otra parte, decisores intolerantes exigen que la mayoría de los criterios sean igualmente satisfechos; esto corresponde a un comportamiento conjuntivo (orness $< 0{,}5$), cuyo ejemplo extremo es min. Por supuesto, orness $= 0{,}5$ corresponde a los decisores equitativos.

El concepto de orness es muy útil para obtener información sobre el comportamiento del decisor. De hecho, dos decisores con las mismas valoraciones parciales $x_1, \dots, x_n$, y los mismos pesos para los criterios, todavía podrían tener diferentes comportamientos en el sentido de que uno de ellos podría ser tolerante y el otro intolerante.

Para el caso particular de los operadores OWA el grado de orness es (Yager, 1988):

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right) \qquad \alpha \in [0,1]$$

Dispersión: en algunas situaciones el grado de orness no proporciona suficiente información sobre el verdadero sentido de la agregación. Por ejemplo, si se considera la mediana y la media aritmética, las cuales son operadores OWA con pesos (0,..., 1,..., 0) y (1/n, …, 1/n) respectivamente, se observa que estos operadores tienen el mismo grado de orness, 1/2, pero se puede ver que son diferentes en el sentido de que el primero de ellos concentra todo el peso en un único argumento.

Con el fin de capturar esta idea, se propone la medida de dispersión asociada al vector de pesos w de un operador OWA:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j)$$

donde ln es el logaritmo natural neperiano y $0 \ln 0 = 0$ por convención. Esta dispersión es una medida de entropía, un bien conocido concepto introducido ya en 1949 en la teoría de la información de Shannon (Shannon & Weaver, 1949). Permite medir la cantidad de información en los argumentos que se utilizan. En cierto sentido más dispersión de W significa que se utiliza más la información sobre los criterios individuales en la agregación.

Operador de balance: Si se consideran los pesos OWA como un vector columna, se puede remitir a los pesos con los índices bajos como pesos en la parte superior y los que tienen los índices más altos como pesos en la parte inferior. De esta manera, la distribución de pesos haciendo hincapié en el argumento de valor mayor/menor en la función de agregación de pesos, están en la parte superior o en la parte inferior de la columna. Para medir el grado de balance entre el favoritismo a los elementos de mayor valor o de valores inferiores se introduce la siguiente medida:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \qquad Bal(W) \in [-1,1]$$

donde $Bal(W) = 1$ representa un criterio optimista, $Bal(W) = -1$ un criterio pesimista y $Bal(W) = 0$ el criterio de Laplace o media aritmética.

Divergencia: por último, otra medida interesante es la divergencia entre del vector de pesos. Es útil en algunas situaciones excepcionales cuando el carácter actitudinal y la entropía de dispersión no son suficientes para analizar el vector de ponderación de una agregación. Por ejemplo, sea $n = 9$ el número de elementos que se agregan y W y W' los vectores de pesos donde $w_2 = w_8 = 0{,}5$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq 2, 8$; y $w'_4 = w'_6 = 0{,}5$ y $w'_j = 0$ para todo $j \neq 4, 6$. En este caso $H(W) = H(W') = \ln(2)$ y $Bal(W) = Bal(W') = 0$ y no se puede extraer información útil de esta medidas. Sin embargo, $Div(W) = 0{,}1406$ y $Div(W') = 0{,}0156$. El vector W' tiene menos divergencia que el vector W debido a que la divergencia entre 4 y 6 es menor que la divergencia entre 2 y 8.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2$$

5. Conclusiones

Se ha realizado una revisión acerca de la agregación de datos, sus principales características y propiedades, y se ha presentado una reseña de los principales operadores de agregación.

Cómo citar este artículo / How to cite this paper

La Red Martínez, D. L., y César Acosta, J. (2014). Revisión de Operadores de Agregación. Campus Virtuales, Vol. III, Num. 2, pp. 24-44. Consultado el [dd/mm/aaaa] en www.revistacampusvirtuales.es

References

Aczél, J. (1966). Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press. New York. USA.
Alsina, C.; Mayor, G.; Tomás, M. S. & Torrens, J. (1993). A characterization of a class of aggregation functions. Fuzzy Sets and Systems 53. 33-38.
Alsina, C.; Trillas, E. & Valverde, L. (1980). Sobre conectivos lógicos no distributivos para la teoría de los conjuntos borrosos. Pub. Mat. UAB 20. 69-72.
Alsina, C.; Trillas, E. & Valverde, L. (1983). On non-distributive logical connectives for fuzzy sets theory. Busefal 3. 18-29.
Alsina, C.; Trillas, E. & Valverde, L. (1983a). On some logical connectives for fuzzy sets theory. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 93 (1). 15-26.
Bellman, R. & Giertz, M. (1973). On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. Inform. Sci. 5. 149-156.
Bouchon-Meunier, B. (editor). (1998). Aggregation and Fusion of Imperfect Information. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 12. Physica-Verlag.
Calvo, T. & Mesiar, R. (2003a). Weighted triangular norms-based aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems, 137. pp. 3-10.
Calvo, T. & Mesiar, R. (2003b). Aggregation operators: ordering and bounds. Fuzzy Sets and Systems, 139. pp. 685-697.
Canós Darós, L. & Liern Carrión, V. (2006). La Agregación de Información Para la Toma de Decisiones en la Empresa. XIV Jornadas de ASEPUMA y II Encuentro Internacional. Universidad de Extremadura. España.
Carlsson, C. H. & Fuller, R. (2002). Fuzzy reasoning in decision making and optimization. Heidelberg: Springfield-Verlag.
Cubillo, S; Pradera, A. & Trillas, E. (1998). On Joining Operators and their and / or Behaviour. Proc. International Conference IPMU'98. 673-679. París. Francia.
De Soto, A. R. & Trillas, E. (1998). Agregación de intervalos borrosos mediante el principio de extensión. Actas del VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, Pamplona. España. 233-237.
Dombi, J. (1982). Basic concepts for a theory of evaluation: The aggregative operator. European J. Oper. Res. 10. 282-293.
Doña Fernández, J. M. (2008). Modelado de los procesos de toma de decisión en entornos sociales mediante operadores de agregación OWA. Tesis doctoral. Universidad de Málaga. España.
Doña, J. M.; Gil, A. M.; La Red, D. L. & Peláez, J. I. (2011). A System Based on the Concept of Linguistic Majority for the Companies Valuation. EconoQuantum. Vol. 8 N. 2. Guadalajara. México. 121-142.
Dubois, D. (1983). Modèles mathématiques de l' imprécis et de l' incertain en vue d' applications aux techniques d' aide à la décision. Tesis Doctoral. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
Dubois, D. & Prade, H. (1985). A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives. Information Sciences 36. 85-121.
Dubois, D. & Prade, H. (1986). Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. Information Sciences 39. 205-210.
Dujmović, J. J. (2012). Andness and Orsess as a Mean of Overall Importance. In: Proceedings of the IEEE World Congress on Computational Intelligence, Brisbane, Australia, June 10-15, pp. 83-88.
Dujmović, J. J. & De Tré, G. (2011). Multicriteria Methods and Logic Aggregation in Suitability Maps. International Journal of Intelligent Systems 26 (10), 971-1001.
Dyckhoff, H. & Pedrycz, W. (1984). Generalized Means as Model of Compensative Operators. Fuzzy Sets and Systems 14. 143-154.
Fernández-Salido, J. M. & Murakami, S. (2003). Extending Yager's orness concept for the OWA aggregators to other mean operators. Fuzzy Sets and Systems, 139. pp. 515-542.
Filev, D. & Yager, R. R. (1998). On the issue of obtaining OWA operators weights. Fuzzy Sets and Systems 94. 157-169.
Fodor, J. (2004). Left-continuous t-norms in fuzzy logic: An Overview. Acta Polytechnica Hungarica. Journal of Applied Sciences, Budapest, Hungary, 1 (2), ISSN 1785-8860.

Fodor, J. & Calvo, T. (1998). Aggregation Functions Defined by t-Norms and t-Conorms. En Bouchon-Meunier, B. (editor). Aggregation and Fusion of Imperfect Information. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 12. Physica-Verlag. 36-48.
Fodor, J. C.; Marichal, J. L. & Roubens, M. (1995). Characterization of some aggregation functions arising from MCDM problems, en Bouchonmeunier, B.; Yager, R. R. & Zadeh, L. A. (eds.). Fuzzy logic and soft computing. Series: Advances in fuzzy systems-Applications and theory, 4. World Scientific Singapore. pp. 194-201.
Fodor, J. & Roubens, M. (1995b). On meaningfulness of means. Journal of Computational and Applied Mathematics. 103-115.
Fodor, J.; Yager, R. R. & Rybalov, A. (1997). Structure of Uninorms. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 411-427.
Frank, M. J. (1979). On the simultaneous associativity of F(x,y) and x + y - F(x,y). Aequationes Mathematicae 19 (2-3). 194-226.
Grabisch, M. (1995). Fuzzy Integral in multicriteria decisión making. Fuzzy Sets and Systems 69. 279-298.
Grabisch, M. (1996). Fuzzy measures and integrals: a survey of applications and recent issues. En Dubois, D.; Prade, H. & Yager, R. (editors). Fuzzy Sets Methods in Information Engineering: a Guided Tour of Applications. J. Wiley & Sons.
Grabisch, M. (1998). Fuzzy Integral as a Flexible and Interpretable Tool of Aggregation. En Bouchon-Meunier, B. (editor): Aggregation and Fusion of Imperfect Information. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 12. Physica-Verlag. 51-72.
Gupta, M. M. & Qi, J. (1991). Theory of t-norms and fuzzy inference methods. Fuzzy Sets and Systems 40 (3). 431-450.
Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. & Chiclana, F. (2003). A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making. International Journal of Intelligent Systems 18. 689-707.
Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. & Verdegay, J. L. (1996b). Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 79, pp. 175-190.
Klement, E.; Mesiar, R. & Pap, E. (1996). On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms. Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. Vol. 4, No. 2. 129-144.
Klir, G. & Yuan, B. (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications. Prentice Hall PTR.
Legind Larsen, H. (2002). Efficient importance weighted aggregation between min and max. 9th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'2002). Annecy. Francia.
Ling, C. H. (1965). Representation of Associative Functions. Publ. Math. Debrecen 12. 189-212.
Liu, X. W. (2006). Some properties of the weighted OWA operator. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 36, 1. 118-127.
Llamazares, B. (2007). Choosing OWA operator weights in the field of Social Choice. Information Sciences: an International Journal. 177, 21. 4745-4756.
Luhandjula, M. K. (1982). Compensatory operators in fuzzy linear programming with multiple objectives. Fuzzy Sets and Systems 8. 245-252.
Marimin, M.; Umano, M.; Hatono, I. & Tamura, H. (1998). Linguistic Labels for Expressing Fuzzy Preference Relations in Fuzzy Group Decision Making. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 28(2): 205-218.
Mayor, G. (1984). Contribució a l' estudi de models matemàtics per a la lógica de la vaguetat. Tesis Doctoral. Universitat de les Illes Balears. España.
Mayor, G. (1984a). Sobre una classe d'operacions entre conjunts difusos: Operacions d'Agregació. Congrés Català de Lógica Matemàtica. Barcelona. España. 95-97.
Mayor, G. & Calvo, T. (1997). On extended Aggregation Functions. Proc. IFSA'97. Praga. 281-285.
Mayor, G. & Martín, J. (1998). Funciones de agregación localmente internas. Actas del VIH Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Pamplona. 355-359.
Mayor, G.; Suñer, J. & Canet, P. (1998). Agregación multidimensional de números borrosos. Actas del VIH Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Pamplona. España. 171-178.
Mayor, G. & Torrens, J. (1988). On a class of binary operations: non-strict Archimedean aggregation functions. Proc. 18th ISMVL, Palma de Mallorca. España. 54-59.
Mayor, G. & Trillas, E. (1986). On the representation of some aggregation functions. Proc. 16th ISMVL, Blacksburg, VA. 110-114.
Merigó, J. M.; Casanovas, M.; Martínez, L. (2010). Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the Dempster-Shafer theory of evidence. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 18, 287-304.
Mesiar, R. & Komorníková, M. (1998). Triangular Norm-Based Aggregation of Evidence under Fuzziness. En Bouchon-Meunier, B. (editor): Aggregation and Fusion of Imperfect Information. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 12. Physica-Verlag. 11-35.
Mizumoto, M. (1989). Pictorial Representations of Fuzzy Connectives. Part II: cases of. compensatory operators and self-dual operators. Fuzzy Sets and Systems 32. 45-79.
Nguyen, H.T.; Kreinovich, V. & Tolbert, D. (1994). A measure of average sensitivity for fuzzy logics. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. Vol. 2, No. 4. 361-375.
Nguyen, H. T. & Walker, E. A. (1997). A First Course in Fuzzy Logic. CRC Press.
O'Hagan, M. (1988). Aggregating template rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. Proc. 22nd Annual IEEE Asilomar Conf. On Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA.
Ovchinnikov, S. (1996). Means on ordered sets. Mathematical Social Sciences 32. 39-56.
Ovchinnikov, S. (1998). An Analytic Characterization of Some Aggregation Operators. International Journal of Intelligent Systems. Vol. 13. 59-68.
Peláez, J. I. & Doña, J. M. (2003). LAMA: A Linguistic Aggregation of Majority Additive Operator, International Journal of Intelligent Systems 18, 809-820.
Peláez, J. I. & Doña, J. M. (2003a). Majority Additive-Ordered Weighting Averaging: A New Neat Ordered Weighting Averaging

Operators Based on the Majority Process, International Journal of Intelligent Systems 18. 469-481.
Peláez, J. I. & Doña, J. M. (2006). A majority model in group decision making using QMA-OWA operators. Int. J. Intell. Syst. 21. 193-208.
Peláez, J. I.; Doña, J. M. & Gil, A. M. (2006). Application of Majority OWA operators in Strategic Valuation of Companies. Proc Int. Eurofuse Workshop. New Trends in Preference Modelling.
Peláez, J. I., Doña, J. M. & Gómez-Ruiz, J. A. (2007). Analysis of OWA Operators in Decision Making for Modelling the Mayority Concept. Applied Mathematics and Computation. Vol. 186. Pages 1263-1275.
Peláez, J. I.; Doña, J. M. & La Red, D. L. (2003). Analysis of the Majority Process in Group Decision Making Process; JCIS 2003 (7th Joint Conference on Information Sciences); ISBN N° 0-9707890-2-5; Proceedings, págs. 155-159; North Carolina; USA.
Peláez, J. I.; Doña, J. M. & La Red, D. L. (2003a). Analysis of the Lingüistic Aggregation Operator LAMA in Group Decision Making Process; 32 JAIIO (Argentine Conference on Computer Science and Operational Research) – ASAI 2003 (Argentine Symposium on Artificial Intelligence); ISSN N° 1666-1079; Argentina.
Peláez, J. I.; Doña, J. M. & La Red, D. L. (2008). Fuzzy Imputation Methods for DataBase Systems. Handbook of Research on Fuzzy Information Processing in Database. Hershey, PA, USA: Information Science Reference.
Peláez, J. I.; Doña, J. M., La Red, D. L., Mesas, A. (2004). OWA Aggregation with Soft Majority Operators; 33 JAIIO (33° Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa) – ASIS 2004 (Primer Simposio Argentino de Sistemas de Información); Anales 2004 (publicación electrónica en CD); ISSN N° 1666-1141; Argentina.
Peláez, J. I.; Doña, J. M. & Mesas, A. (2005). Majority multiplicative ordered weighting geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations. Mathware and Soft Computing. 12. 107-120.
Peláez, J. I.; Doña, J. M.; Mesas, A. & La Red, D. L. (2004). Opinión de Mayoría en Toma de Decisiones en Grupo Mediante el Operador QMA-OWA; ESTYLF 2004 (XII Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy); Libro de Actas, págs. 449-454; ISBN N° 84-609-2160-3; España.
Pradera Gómez, A. (1999). Contribución al Estudio de la Agregación de Información en un Entorno Borroso. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
Ralescu, A. L. & Ralescu, D. A. (1997). Extensions of fuzzy aggregation. Fuzzy Sets and Systems 86. 321-330.
Shannon, C. E. & Weaver, W. (1949). A mathematical theory of communication. University of Illinois Press. Urbana.
Schweizer, B. & Sklar, A. (1961). Associative functions and statistical triangle semigroups. Publ. Math. Debrecen 8. 169-186.
Silvert, W. (1979). Symmetric summation: A class of operations on fuzzy sets. IEEE Trans. Systems, Man Cybernet. 9. 659-667.
Smolíkova, R. & Wachowiak, M. P. (2002). Aggregation operators for selection problems. Fuzzy Sets and Systems, 131. pp. 23-24.
Torra, V. (1997). The Weighted OWA Operator. International Journal of Intelligent Systems. 12. 153-166.
Trillas, E.; Cubillo, S. & Castro, J. L. (1995). Conjunction and disjunction on ([0,1], ≤). Fuzzy Sets and Systems 72. 155-165.
Trillas, E.; Pradera, A. & Cubillo, S. (1999). A mathematical model for fuzzy connectives and its application to operator's behavioural study. En Bouchon-Meunier, B.; Yager, R. R. & Zadeh, L. A. (eds): Information, Uncertainty, Fusion. Kluwer Scientific Publishers.
Turksen, I. B. (1986). Interval-valued fuzzy sets based on normal forms. Fuzzy Sets and Systems 20. 191-210.
Yager, R. R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Operators in Multicriteria Decisionmaking. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18. 183-190.
Yager, R. R. (1993). Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems, 59. 125-148.
Yager, R. R. (1996). On a class of weak triangular norm operators. Tech. Report #MII-1528. Machine Intelligence Institute. Iona College. New Rochelle. NY. USA.
Yager, R. & Filev, D. P. (1992). Fuzzy logic controllers with flexible structures. Proc. Second Int. Cont. on Fuzzy Sets and Neural Networks. Izuka Japan. 317-320.
Yager, R. R. & Kelman, A. (1996). Fusion of Fuzzy Information With Considerations for Compatibility, Partial Aggregation and Reinforcement. International Journal of Approximate Reasoning 15. 93-122.
Yager, R. R. & Rybalov, A. (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80. 111-120.
Yager, R. R. & Rybalov, A. (1997). Noncommutative self-identity aggregation. Fuzzy Sets and Systems 85. 73-82.
Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. SMC, SMC-3. 38-44.
Zadeh, L. A. (1983). The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. Fuzzy Sets and Systems, 11: 199-227.
Zimmermann, H. J. (1991). Fuzzy sets theory and its application. Kluwer Academia Publishers. Boston / Dordrecht / London.
Zimmermann, H. J. & Zysno, P. (1980). Latent connectives in human decision-making. Fuzzy Sets and Systems 4. 37-51.